Nazwa przedmiotu Analiza Matematyczna I (1000-M1AM1), Analiza Matematyczna II (1000-M1AM2)
Wykładowcy prof. dr hab. L. Górniewicz, prof. dr hab. Wojciech Kryszewski
Wymiar i forma zajęć AM I: 120 (=60+60) godz. wykładu + 120 (=60+60) godz. ćwiczeń, AM II: 75 (=45+30) godz. wykładu + 75 (=46+30) godz. ćwiczeń
Wymagania egzaminacyjne Egzaminy ustne po pierwszym, drugim i czwartym semstrze, zaliczenie ćwiczeń w każdym semestrze
Wymagania wstępne Znajomość matematyki w zakresie szkoły średniej przed pierwszym semestrem, w kolejnych semestrach zaliczenie poprzedniego semestru przedmiotu
Opis przedmiotu Podstawowy wykład z analizy matematycznej dla studentów studiów I stopnia na kierunku matematyka, specjalność matematyka ogólna. Celem wykładu w pierwszym roku jest przedstawienie podstawowych informacji na temat rachunku różniczkowego funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej. W drugim roku celem jest przedstawienie wiadomości dotyczących rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych. Ćwiczenia mają charakter rachunkowy. Ich zadaniem jest pomoc w zrozumieniu wykładu i nabycie elementarnych zdolności rachunkowych.

Program wykładu

- Funkcje; injekcje, surjekcje, bijekcje, odwracalność; pojęcia obrazu, przeciwobrazu, złożenia; funkcje rzeczywiste, operacje algebraiczne na funkcjach rzeczywistych; miejsca zerowe, monotoniczność, parzystość, nieparzystość, okresowość. Funkcje elementarne i ich własności.

- Pojęcie liczby rzeczywistej; aksjomatyka zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych; konsekwencje aksjomatów algebraicznych i porządkowych; konsekwencje aksjomatu ciągłości, kresy górny i dolny zbioru, istnienie kresów; podzbiory zbioru $\mathbb{R}$, zasada indukcji matematycznej, umiejętność dowodzenia przy pomocy indukcji, zasada Archimedesa; gęstość zbioru $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$; istnienie pierwiastków; potęga o dowolnym wykładniku; istnienie logarytmów; równoliczność i przeliczalność zbiorów; nieprzeliczalność zbioru $\mathbb{R}$ i przeliczalność zbioru $\mathbb{Q}$; konstrukcja Dedekinda zbioru liczb rzeczywistych. Podstawowe nierówności: Cauchy-Schwarza, pomiędzy średnimi; rozszerzony system liczb rzeczywistych.

- Ciągi liczbowe; ograniczoność, zbieżność, warunek Cauchy'ego, przykłady ciągów zbieżnych i rozbieżnych; podstawowe twierdzenia o zbieżności, podciągi; zbieżność ciągów monotonicznych i ograniczonych; twierdzenie Bolzano-Weierstrassa; własności algebraiczne granic ciągów. Granice niewłaściwe; twierdzenie Stolza. Ciągi monotoniczne; definicja liczby e. Granice częściowe i ekstremalne. Konstrukcja Cantora zbioru liczb rzeczywistych. Informacja o strukturze metrycznej w $\mathbb{R}$.

- Granica funkcji, pojęcie punkty skupienia; definicje Cauchy'ego i Heinego, przykłady; warunki konieczne i dostateczne istnienia granicy; granice jednostronne i niewłaściwe; działania na granicach. Ciągłość funkcji: definicje Cauchy'ego i Heinego; warunek Lipschitza, przykłady; kombinacje funkcji ciągłych; własność Darboux funkcji ciągłych; twierdzenie o funkcji odwrotnej; twierdzenie Weierstrassa; jednostajna ciągłość funkcji przykłady, związki z warunkiem Lipschitza, przykłady; twierdzenie Kantora. Punkty nieciągłości i ich klasyfikacja.

- Pojęcie pochodnej; interpretacja fizyczna i geometryczna, przykłady i podstawowe wzory; ciągłość funkcji różniczkowalnej; różniczkowalność złożenia; różniczkowalność funkcji odwrotnej; pochodne jednostronne; twierdzenie Fermata; własność Darboux dla pochodnej; twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a; twierdzenie Cauchy'ego; zastosowania twierdzenia Lagrange'a; monotoniczność a twierdzenie Lagrange'a.

- Badanie funkcji przy pomocy pochodnych: monotoniczność, wypukłość, ekstrema funkcji; twierdzenie Taylora. Twierdzenie de L'Hospitala. Elementy interpolacji; przybliżone metody rozwiązywania równań.

- Pojęcie szeregu liczbowego; jego zbieżność; warunek konieczny; warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu; zbieżność bezwzględna; jej związki ze zbieżnością; kryteria zbieżności bezwzględnej d'Alemeberta, Cauchy'ego, Cauchy'ego o zagęszczaniu; zbieżność warunkowa; kryterium Leibniza; kryteria Dirichleta i Abela; operacje na szeregach; związki zbieżności bezwzględnej i bezwarunkowej. Pojęcie iloczynu Cauchy'ego szeregów; twierdzenie Mertensa; iloczyny nieskończone.

- Definicja całki Riemanna; warunek konieczny i dostateczny całkowalności; twierdzenie Darboux-Riemanna i metoda poszukiwania całki z niego wynikająca; własności całki; klasy funkcji całkowalnych; całkowalność iloczynu funkcji; całkowalność wartości bezwzględnej z funkcji całkowalnej; twierdzenia o wartości średniej; własności funkcji górnej granicy całkowania; twierdzenie Leibniza-Newtona. Pojęcie funkcji pierwotnej; funkcja górnej granicy całkowania; podstawowe własności funkcji pierwotnych; metody obliczania całki Riemanna: wzory na całkowanie przez części i podstawianie; podstawowe metody poszukiwania funkcji pierwotnych (całka nieoznaczona); zastosowania geometryczne całki; długość krzywej; pole powierzchni różnych obszarów; objętość figur obrotowych; całka niewłaściwa I-go i II-go rodzaju; zbieżność całki; podstawowe własności całek niewłaściwych; kryteria zbieżności całek; twierdzenie Cauchy'ego-MacLaurina.

- Ciągi i szeregi funkcyjne; pojęcia ciągu i szeregu funkcyjnego i ich zbieżność; twierdzenia o ciągłości granicy ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji ciągłych, twierdzenie o różniczkowaniu i całkowaniu ciągów zbieżnych jednostajnie; kryteria Weierstrassa, Abela i Dirichleta. Pojęcie szeregu potęgowego; twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda; własności sumy szeregu potęgowego; szereg Taylora, rozwijalność funkcji w szereg Taylora; przykłady. Twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji. Szeregi Fouriera; kryteria zbieżności; rozwijanie funkcji w szereg Fouriera.

- Przestrzenie metryczne; podstawowe definicje; zbiory otwarte i domknięte i ich własności. Domknięcie i wnętrze zbioru. Ciągi w przestrzeniach metrycznych, ciągowa charakteryzacja domkniętości zbiorów i domknięcia. Ciągłość funkcji, charakteryzacja ciągłości. Przestrzenie zupełne; przykłady; twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Przestrzenie unormowane i Banacha; przykłady. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jako przestrzeń metryczna, unormowana i Banacha; zbieżność w $\mathbb{R}^n$. Pojęcie zwartości przestrzeniach spójności w przestrzeniach metrycznych; charakteryzacja zwartości w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Ciągłość jednostajna funkcji w przestrzeniach metrycznych.

- Pochodna kierunkowa funkcji wielu zmiennych; pochodne cząstkowe. Pojęcie pochodnej, macierz Jacobiego. Ciągłość funkcji różniczkowalnych, różniczkowalność sumy, iloczynu; reguła łańcucha (różniczkowalność złożenia). Warunek dostateczny różniczkowalności. Twierdzenie o przyrostach (o wartości średniej). Pochodna drugiego i wyższych rzędów, twierdzenie Schwarza; warunki dostateczne różniczkowalności wyższych rzędów. Notacja multiindeksowa i wzór Leibniza. Wzór Taylora z resztą w postaci Peano i Lagrange'a (oszacowanie reszty) . Ekstrema funkcji wielu zmiennych: warunki konieczne i dostateczne.

- Twierdzenie o funkcji uwikłanej, twierdzenie o lokalnym odwracaniu odwzorowań; twierdzenie o rzędzie; dyfeomorfizmy. Pojęcie hiperpowierzchni; twierdzenia o charakteryzacji hiperpowierzchni; pojęcie wektora stycznego. Ekstrema związane funkcji na hiperpowierzchniach; warunek konieczny (mnożniki Lagrange'a); warunki dostateczne.

- Pojęcie całki Riemanna funkcji wielu zmiennych na prostokącie. Przestrzenie mierzalne; pojęcie s-ciała zbiorów; własności; s-ciała generowane przez rodziny zbiorów; zbiory borelowskie. Mierzalność funkcji; warunki konieczne i dostateczne mierzalności; własności funkcji mierzalnych. Miara i jej własności. Funkcje proste. Pojęcie całki: całka funkcji prostych; całka funkcji nieujemnych, całka dowolnych funkcji mierzalnych. Własności całki. Twierdzenie o przejściach granicznych; twierdzenie Beppo-Leviego (Lebesgue'a o monotonicznym przejściu do granicy); lemat Fatou; twierdzenie Lebesgue'a o majoryzowanym przejściu do granicy. Warunki dostateczne całkowalności. Miara zewnętrzna (generator miary) i konstrukcja Caratheodory'ego miary (twierdzenie Caratheodory'ego). Konstrukcja miary instrukcja całki Lebesgue'a $\mathbb{R}^n$. Warunki konieczne i dostateczne mierzalności w sensie Lebesgue'a. Warunek konieczny i dostateczny całkowalności w sensie Riemanna. Miary produktowi; zasada Cavalieriego; twierdzenie Tonellego i Fubiniego; całki iterowane na zbiorach w postaci normalnej. Zmiana zmiennych w całce Lebesgue'a. Własności całki jako funkcji parametru: ciągłość, różniczkowalność i całkowalność. Przestrzenie funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a; szeregi Fouriera w L^2.

Literatura podstawowa

1. L. Górniewicz, R. S. Ingarden, *Analiza matematyczna dla fizyków, tom I, II*, Wydawnictwo UMK, Toruń 1995.

2. W. Kryszewski, skrypt (udostępniany jest wszystkim studentom I-go i II-go roku bezpośrednio lub przez internet).

Literatura uzupełniająca

1. G. Fichtenholz, *R achunek różniczkowy i całkowy, tom I*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

2. W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa 1979.

3. K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

4. F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

5. K. Maurin, *Analiza Matematyczna*, tom I, PWN, Warszawa (wiele wydań)

6. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

7. R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa (wiele wydań).

Zbiory zadań

1. J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, WNT, Warszawa (wiele wydań).

2. W. Kołodziej, *Podstawy analizy matematycznej w zadaniach*, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1989.

3. L. Siewierski i in. *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami*, PWN, Warszawa 1981, 1982.

Ponadto użytkowany może być dowolny podręcznik do analizy matematycznej lub rachunku różniczkowego i całkowego, np. klasyczne książki Sierpińskiego, Banacha, Whittakera i Watsona, Hilberta lub współczesne podręczniki w języku angielskim lub rosyjskim.